

Análisis de series temporales de dos manantiales kársticos mediante la aplicación de modelos ARMA

Time-series analysis of two karstic springs by the application of ARMA models

A. Padilla (*), A. Pulido-Bosch(**) y M. L. Calvache(**)

(*) Investigaciones Geológicas y Mineras S.A. Urban. Alcázar Genil. Ed. Azulema, Bajo, Granada.

(**) Departamento de Geodinámica. Universidad de Granada. 18071 Granada.

ABSTRACT

ARMA models have been applied to study the flow series of two karstic springs: La Villa (El Torcal Aquifer, Málaga) and Fuente Mayor (Simat de Valdigña Aquifer, Valencia). We have analysed the theoretic meaning of the parameters involved in the model upon applying it to a simple scheme of the emptying of two karstic aquifers. We have also indicated the types of transformations necessary to apply these models to the flow series which lack normality and having a strong periodic component. From our results we point out the advantages of using this type of model, and discuss the physical significance of the parameters obtained, from hydrodynamic standpoint.

Key words: ARMA model, time-series, karstic spring, El Torcal Aquifer, Simat de Valdigña Aquifer.

Geogaceta, 19 (1996), 138-141

ISSN: 0213683X

Introducción

Los modelos autorregresivos de medias móviles (ARMA) se han aplicado fundamentalmente a procesos hidrológicos estacionales univariados (Salas *et al.*, 1980; 1982; Obeysekera y Salas, 1986; Haltiner y Salas, 1988; Ula, 1990). Estos modelos univariados se basan en el análisis de la estructura estocástica de una serie temporal con el objeto de pronosticar a corto plazo, completar datos y generar series sintéticas que conserven los principales estadísticos y la correlación temporal (función de autocorrelación) de la serie original. En este trabajo demostraremos la aplicabilidad de los modelos ARMA al estudio de series temporales de manantiales que drenan acuíferos carbonatados y, además, se relacionarán los coeficientes autorregresivos y de medias móviles con el distinto grado de karstificación que presentan estos acuíferos (Padilla *et al.*, 1995). Uno de los manantiales estudiados, La Villa, drena el acuífero kárstico de El Torcal (Antequera, Málaga) con una superficie de 28 km² que presenta un característico flujo difuso (*baseflow* en el sentido de Padilla *et al.*, 1994); y el otro, Fuente Mayor, se encuentra en el acuífero también kárstico de Simat de Valdigña (Valencia), de 20 km² de

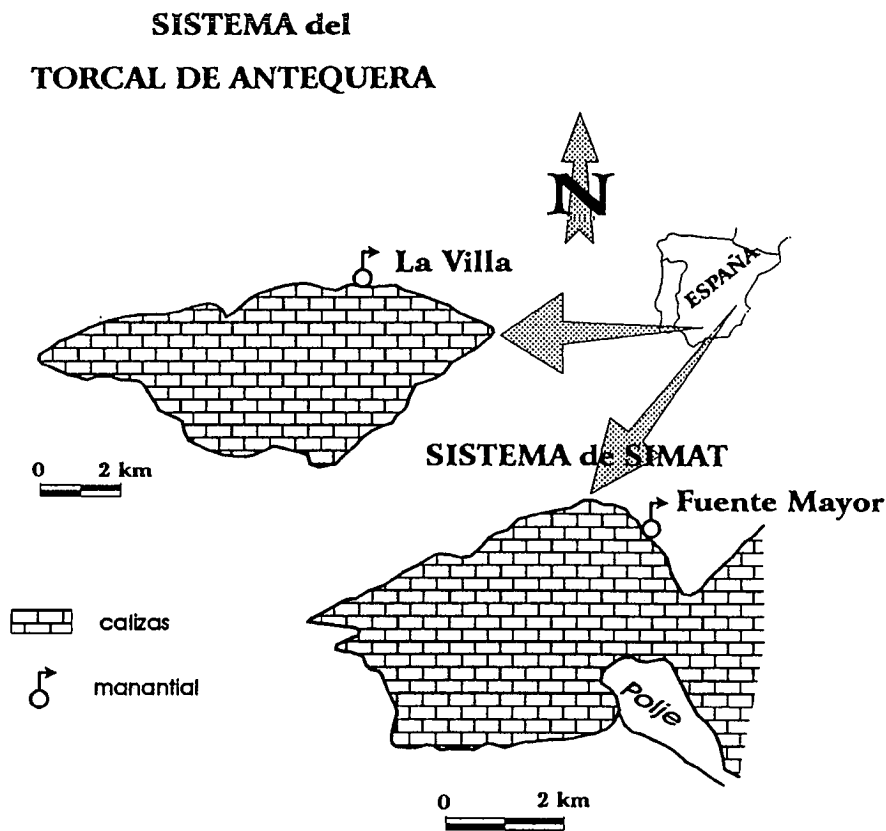


Fig. 1.- Localización de los acuíferos estudiados.

Fig. 1.- Location of the studied aquifers.

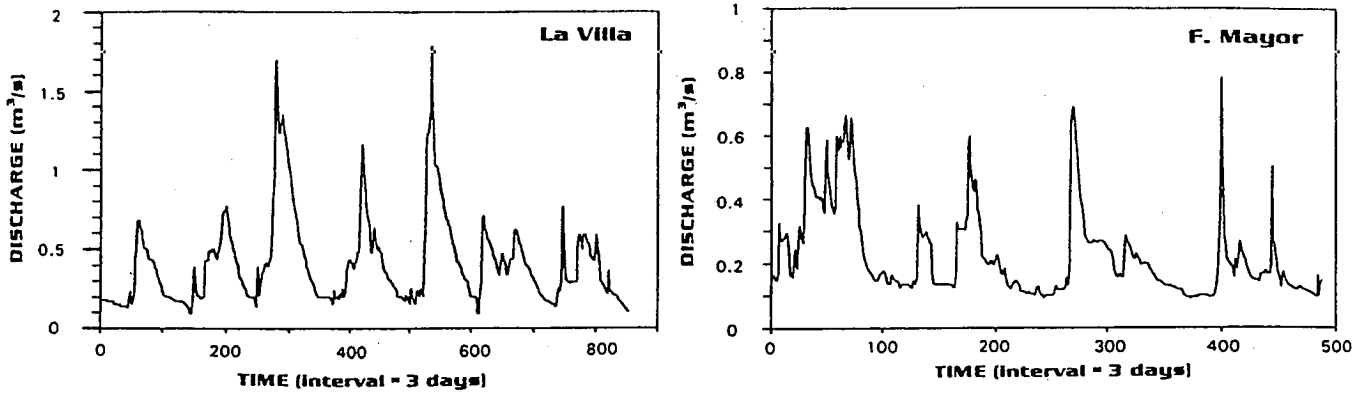


Fig. 2.- Hidrogramas de los manantiales de La Villa y Fuente Mayor.

Fig. 2.- Flow hydrographs of La Villa and Fuente Mayor springs.

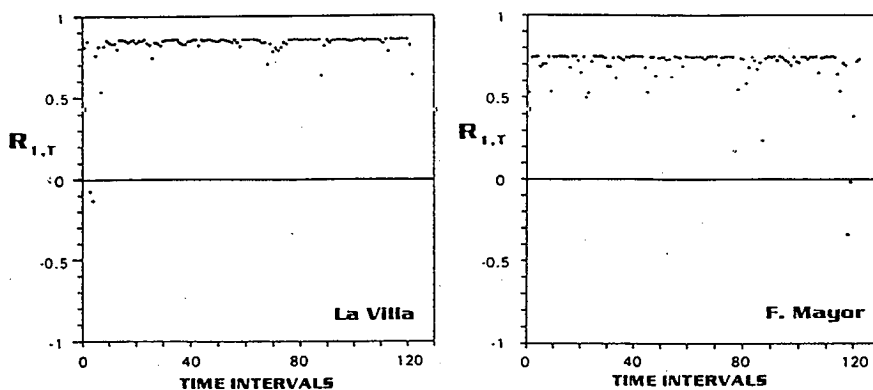


Fig. 3.- Primer coeficiente de autocorrelación ($R_{1,T}$) de las series $z_{v,T}$ de La Villa y Fuente Mayor.

Fig. 3.- First autocorrelation coefficient ($R_{1,T}$) of the series $z_{v,T}$ of La Villa and Fuente Mayor.

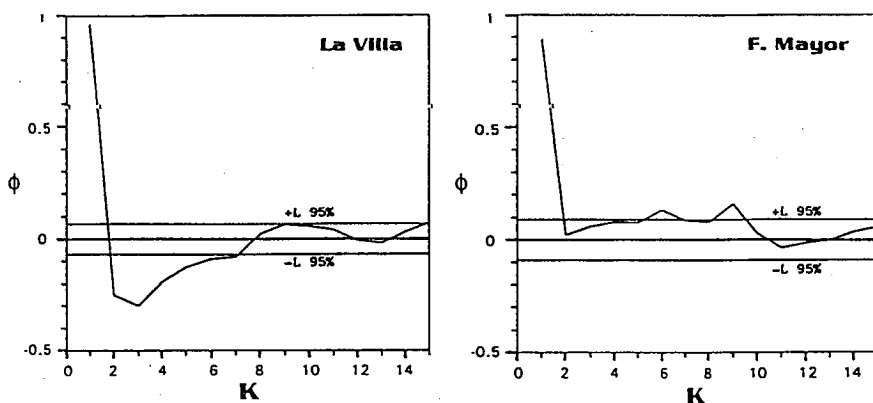


Fig. 4.- Autocorrelograma parcial de las series z_t de caudales de La Villa y Fuente Mayor.

Fig. 4.- Partial autocorrelogram of the series z_t of the flows at La Villa and Fuente Mayor.

extensión, que presentaría un comportamiento intermedio, ya que se encuentra, además de un flujo difuso, una componente de flujo rápido (*quickflow* en el sentido de Padilla *et al.*, 1994) (Fig. 1). La relación entre la dinámica de cada manantial y el funcionamiento del acuífero que drena

han sido establecidas por Mangin y Pulido-Bosch, 1983; Padilla, 1990; Pulido-Bosch y Padilla, 1990; y Padilla *et al.*, 1994).

Aplicamos un modelo ARMA (p,q) de parámetros constantes cuya expresión general es (Box y Jenkins, 1976):

$$z_t = \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}$$

donde z_t representa una serie temporal, hidrológica y periódica, ϕ_i y θ_j son coeficientes autorregresivos y de medias móviles, respectivamente, que dependen del tiempo y a_t es una variable independiente y normalmente distribuida (ruido blanco).

El procedimiento seguido en este trabajo es el siguiente. En primer lugar se transforman las series de caudales para reducir el sesgo (valores altos indican falta de normalidad) y eliminar el carácter periódico de la serie. A continuación, se calculan los parámetros autorregresivos y de medias móviles aplicando el método de mínimos cuadrados que resuelve un sistema de ecuaciones mediante el algoritmo de Marquarot (1963). Por último, se verá qué modelos ARMA se ajustan mejor a las series de datos y se demostrará la bondad del ajuste de estos modelos.

Tratamiento de las series de datos

Los períodos estudiados cubren 7 años hidrológicos (74/75 a 80/81) para el caso de La Villa y 4 años para el caso de Fuente Mayor (73/74 a 76/77) con intervalos de muestreo de tres días (854 y 488 datos, respectivamente). Los hidrogramas de ambos manantiales (Fig. 2) muestran un comportamiento bastante inercial en ambos acuíferos, aunque más patente en el caso de La Villa, como así lo demuestran las pendientes más suaves a partir de los picos. Asimismo, se observa una fuerte componente periódica anual que se eliminará más adelante.

Para disminuir el sesgo de las series y tras realizar una serie de transformaciones, se opta por la aproximación logarítmica

como la posibilidad más apropiada. El sesgo de la nueva serie, $y_t = \log(q_t)$, en La Villa pasa de 1.81 a 0.33 y en Fuente Mayor de 1.61 a 0.705. Como se puede ver, en los dos casos disminuye el sesgo de forma apreciable.

Con el objeto de analizar la periodicidad de los principales estadísticos (media y desviación típica) se agrupan los términos de las series y_t en los años correspondientes; las nuevas series se representan como $y_{v,T}$ donde V representa los años y T los intervalos en los cuales se divide cada año. La periodicidad queda eliminada mediante la siguiente transformación:

$$z_{v,T} = \frac{y_{v,T} - m_T}{s_T}$$

Para simplificar el proceso se han calculado m_T y s_T mediante los coeficientes más significativos obtenidos con la transformada de Fourier (Salas *et al.*, 1980). Este método ha sido usado frecuentemente por varios autores, como son Chu y Katz (1989) y Wasimi (1990).

La figura 3 confirma que la periodicidad en ambas series de datos ha sido eliminada ya que el primer coeficiente de autocorrelación, $R_{1,T}$, permanece en ambos casos casi constante (Salas *et al.*, 1980). En consecuencia, es factible el ajuste de un modelo ARMA de parámetros constantes a las series de datos transformadas.

Ajuste y bondad de los modelos

Los autocorrelogramas parciales con límites de fiabilidad del 95% de z_t permiten obtener los parámetros autorregresivos y, en menor grado, los de medias móviles de los modelos ARMA a aplicar (Box y Jenkins, 1976; Fig. 4). En ambos casos, indican la existencia de un fuerte primer parámetro autorregresivo, por lo que los modelos ARMA ajustados tendrán un parámetro autorregresivo. Para fijar el número de parámetros de medias móviles se han llevado a cabo seis ensayos en el caso de La Villa y cuatro en el caso de Fuente Mayor (Tabla 1). De los modelos analizados, el ARMA (1,2) y el ARMA (1,0) para los manantiales de La Villa y Fuente Mayor, respectivamente, presentan los valores menores de Sa^2 y AIC. Por lo tanto, los modelos ARMA(1,2) y ARMA (1,0) ajustados para La Villa y Fuente Mayor, respectivamente, se expresan:

$$\hat{z}_t = 0.811\hat{z}_{t-1} + a_t + 0.071a_{t-1} + 0.119a_{t-2} - 0.003\hat{z}_t$$

$$\hat{z}_t = 0.892\hat{z}_{t-1} + a_t - 0.011$$

Una forma de probar la bondad de los modelos ajustados es estableciendo la independencia de los residuos; para esto

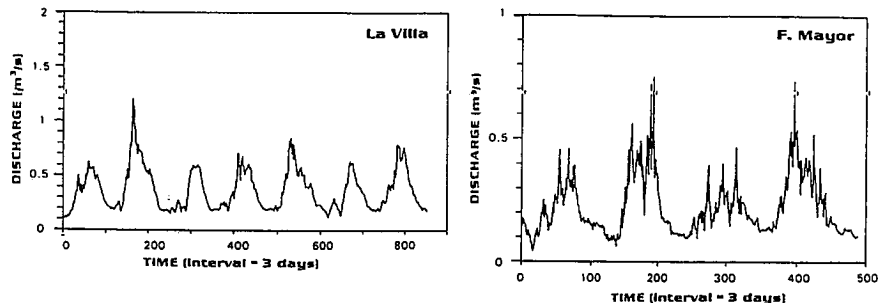


Fig. 5.- Hidrogramas sintéticos obtenidos a partir de los modelos ajustados a los caudales de La Villa y Fuente Mayor.

Fig. 5.- Synthetic hydrographs obtained with the models adjusted to the flows at La Villa and Fuente Mayor.

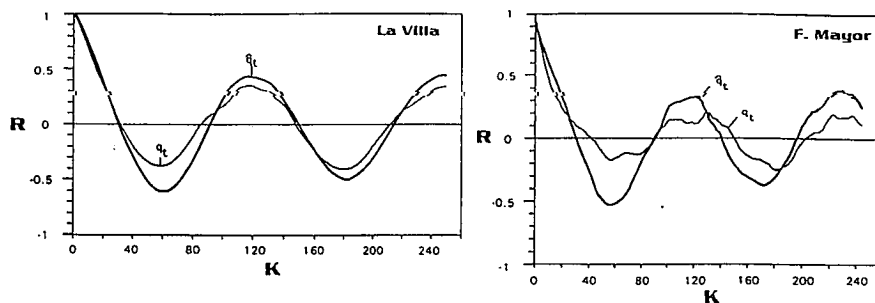


Fig. 6.- Autocorrelogramas de los caudales reales (q_r) y generados (q_g) en La Villa y Fuente Mayor.

Fig. 6.- Autocorrelograms of real (q_r) and generated (q_g) flows at La Villa and Fuente Mayor.

se ha utilizado el test de Porte Manteau, que ha resultado positivo en ambos casos, con lo cual la hipótesis de independencia queda aceptada.

Los valores aleatorios de las series sintéticas z_t han sido generados con la misma media y desviación típica y siguiendo la misma distribución normal que muestran los residuos de cada modelo ajustado ($N(0,0.27)$ para La Villa y $N(0,0.49)$ para Fuente Mayor).

Para obtener las series sintéticas de caudales se han seguido las mismas transformaciones pero de forma inversa. Una vez que los valores de z_t se agrupan en sus correspondientes años, la serie $z_{v,T}$ se transformará mediante esta expresión:

$$\hat{y}_{v,T} = \hat{s}_T z_{v,T} + m_T$$

$$q_{v,T} = 10^{\hat{y}_{v,T}}$$

Se puede observar que los hidrogramas sintéticos (fig. 5) se parecen bastante a los casos reales. En el caso de Fuente Mayor, encontramos una componente de ruido blanco más acentuada debida posiblemente a la

ausencia de coeficientes de medias móviles que podrían haber suavizado este ruido. Sin embargo, la introducción de un número mayor de parámetros no representaba una mejora en el modelo. Los correlogramas de las series q_r y q_g (Fig. 6) son muy similares, indicando que se preservan los principales estadísticos en los modelos ajustados.

Conclusiones

Teniendo en cuenta el significado físico que se les ha dado a los parámetros autorregresivos y de medias móviles (Padilla, 1990 y Padilla *et al.*, 1995) y el resultado que se obtiene en los modelos ARMA ajustados para los dos manantiales estudiados, se puede decir que, en efecto, los coeficientes autorregresivos representan el coeficiente de drenaje (velocidad de vaciado de la zona saturada sin influencia de precipitaciones, es decir, *baseflow*) de los acuíferos estudiados. Así, en La Villa, que drena un acuífero kárstico más inercial, el valor del parámetro autorregresivo es más elevado que en el caso de Fuente Mayor y mucho más elevado que el

	Modelo	C	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	θ_2	θ_3	Sa ²	Q	AIC
LA VILLA	ARMA(1,0)	-0.002	0.966	--	--	--	--	65.1	93.9	-2196
	ARMA(1,1)	-0.004	0.955	--	-0.245	--	--	61.0	36.6	-2249
	ARMA(1,2)	-0.004	0.938	--	-0.293	-0.136	--	60.1	24.9	-2260
	ARMA(1,3)	-0.004	0.944	--	-0.278	-0.117	-0.073	60.0	23.9	-2259
	ARMA(2,0)	-0.002	1.207	-0.251	--	--	--	60.5	28.7	-2256
	ARMA(2,1)	-0.003	1.228	-0.270	0.005	--	--	60.5	28.8	-2256
FUENTE MAYOR	ARMA(1,0)	-0.011	0.892	--	--	--	--	117.7	15.6	-413
	ARMA(1,1)	-0.016	0.900	--	-0.029	--	--	117.6	15.6	-411
	ARMA(2,0)	-0.016	0.872	0.024	--	--	--	117.6	15.6	-411
	ARMA(2,1)	-0.030	0.143	0.673	-0.754	--	--	117.6	15.6	-409

Tabla 1.- Parámetros de los modelos ajustados a las series z_t de los manantiales de La Villa y Fuente Mayor: C, término constante; ϕ_p , coef. autorregresivos; θ_p , coef. de medias móviles; Sa², suma de los cuadrados de los residuos; Q, valor de χ^2 para los 20 primeros coef. de autocorrelación de los residuos; y AIC, criterio de información de Akaike (1974) de parsimonia de parámetros.

Table 1.- Parameters of the adjusted models to z_t series at La Villa and Fuente Mayor: C, constant; θ_p , autoregressive coefficients; ϕ_p , moving average coefficients; Sa², sum of the square residuals; Q, value of χ^2 for the first 20 autocorrelation coefficients of residuals; and AIC, information criteria of Akaike (1974) about parameters parsimony.

encontrado en otros estudios de acuíferos donde domina la componente rápida del flujo (Padilla *et al.*, 1995).

Los coeficientes de medias móviles y la varianza de los residuos representan, en cambio, la aleatoriedad del sistema (circulación por grandes conductos, es decir, *quickflow*), influenciada por el régimen de precipitaciones. En el caso de los coeficientes de medias móviles no se pueden obtener conclusiones para los manantiales estudiados, ya que en Fuente Mayor el modelo que más se ajustaba a la serie de datos, ARMA (1,0), no mostraba parámetros de medias móviles. La varianza de los residuos sí que muestra un valor bastante más elevado en Fuente Mayor (0.242) que en La Villa (0.073).

Los resultados de esta investigación nos inducen a pensar que la mayor utilidad de los modelos ARMA radica en la generación de series sintéticas que conserven los principales estadísticos, sobre todo los referidos a la función de

autocorrelación, con vistas a su utilización en otro tipo de modelos y en el completado de lagunas en series de datos.

Agradecimientos

La investigación de este proyecto ha sido financiada por la CICYT (Proyecto AMB92-0211).

Referencias

- Akaike, H. (1974): *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19, 6: 716-723.
- Box, G.E.P. y Jenkins, G.M., 1976: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco, 575 pp.
- Chu, P.S. y Katz, W. (1989): *J. Climate, Amer. Meteor. Soc.*, 2(1): 86-90.
- Haltiner, J.P. y Salas, J.D. (1988): *J. Hydrol.*, 104: 247-272.
- Mangin, A. y Pulido-Bosch, A. (1983):

Tecniterrae, 51: 53-65.

Marquarot, D.W. (1963): *J. Soc. Ind. App. Math.*, 2: 431-441.

Obeysekera, J.T.B. y Salas, J.D. (1986): *J. Hydrol.*, 86: 197-219.

Padilla, A. (1990): Tesis Doctoral, Univ. Granada.

Padilla, A., Pulido-Bosch, A. y Mangin, A. (1994): *Ground Water*, v. 32, no. 2: 267-277.

Padilla, A., Pulido-Bosch, A. y Calvache, M.L. (1995): *C.R. Acad. Sci. Paris*, 321, s. II a, 31-37.

Pulido-Bosch, A. y A. Padilla, (1990): *Hidrogeol.* 5: 11-22.

Salas, J.D., Yevjevich, V. y Lane, W.L. (1980): *Applied modeling of hydrologic time series*. Water Resour. Pub. Littleton, 484 pp.

Salas, J.D., Boes, D.C. y Smith, R.A. (1982): *Water Resour. Res.* 18(4): 1006-1010.

Ula, T.A. (1990): *Water Resour. Res.*, 26(5): 855-861.

Wasimi, S.A. (1990): *Water Resour. Res.*, 26(11): 2741-2746.